

Title	Quasi-Similarity on Unbounded Operators
Author(s)	太田, 昇一
Citation	数理解析研究所講究録 (1991), 743: 104-108
Issue Date	1991-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/102147
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Quasi-Similarity on Unbounded Operators

九州芸工大 太田 昇一 (Schôichi Ôta)

1. T を Hilbert 空間 \mathcal{H} において、稠密な定義域をもつ linear operator とする。もしも、 T が

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*) \quad \text{かつ}$$

$$\|Tx\| \geq \|T^*x\| \quad \text{for } \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

($\mathcal{D}(T)$: T の定義域) を満たすとき、 T は formally hyponormal と言われる。さらに、 T が $TT^* = T^*T$ を満たすとき、 T は normal と言われる。

T が subnormal であるとは、 \mathcal{H} を closed subspace とし、含む適当な Hilbert 空間 K と、 K 上の normal operator N が存在して、

$$T\eta = N\eta \quad \text{for } \forall \eta \in \mathcal{D}(T)$$

が成り立つときをいう。

subnormal operator は formally hyponormal であることに注意しておきましょう。さらに、formally hyponormal operator T は closable で、enclosure \overline{T} も又 formally hyponormal になることも注意する。

2. X を Hilbert 空間 \mathcal{H}_1 から \mathcal{H}_2 への bounded operator とし、 X が one to one で dense range をもつとき、 X を quasi-invertible と呼ぶことにする。 A, B をそれぞれ $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ における稠密な定義域をもつ linear operator とし、 A が B に quasi-affine であるとは、適当な \mathcal{H}_1 から \mathcal{H}_2 への quasi-invertible operator X_{AB} が存在して、

$$X_{AB} \cdot A \subseteq B \cdot X_{AB}$$

を満たすことをいう。

A が B に quasi-affine であり、 B も A に quasi-affine なとき、 A は B に quasi-similar という。

quasi-similarity は equivalence relation であり、 A と B が quasi-similar ならば、 A^* と B^* も quasi-similar である。

3. 次の定理は、有界作用素論において知られている (Clary (1975) の結果に対応している)。

定理. Quasi-similar closed formally hyponormal operators のスペクトルは同じ。

4. 次の定理は Douglas (1969) の結果が、非有界でも成立することによって知られている。

定理. A と B を normal operators とする。 A が B に

quasi-affine ならば、 A と B は unitarily equivalent である。

5. 作用素の *quasi-similarity* に関する諸結果は、非有界 $*$ -表現論においてあらわれるそれと酷似している。たとえば、[4]において得られた「 π を $*$ -環の closed $*$ -representation としたとき、もしその adjoint 表現 π^* が π に *quasi-affine* ならば、 π は Powers の意味で selfadjoint ($\pi = \pi^*$) になる」に対応して、「closed symmetric operator T の adjoint T^* が T に *quasi-affine* ならば、 T は selfadjoint である」なる命題が考えられるが、これは初等的計算ですぐわかる。

6. 上記の 5 に関連して、 T を normal にすると一般に T^* が T に unitarily equivalent でも T は selfadjoint にならない (有界作用素の範囲で反例が知られている) が、normal operator A が、ある selfadjoint operator に *quasi-affine* ならば A は selfadjoint になる。

次の定理は、Stampfli-Sa Haen, Radjavi-Rosenthal の結果 (1970) を非有界な場合に拡張したものです。 $\rho(T)$ は T の resolvent 集合を示す。

定理. S を $\rho(\bar{S}) \neq \emptyset$ なる subnormal operator とする。もしも、ある normal operator B があって、 B が S に *quasi-affine*

ならば、 \bar{S} も normal で \bar{S} と B は unitarily equivalent になる。

7. もっと一般には 次の定理が得られる。

定理 A を Hilbert space \mathcal{H} における subnormal operator とする。 \mathcal{H} 上の normal operator で A に quasi-affine なものが存在するとする。 このとき、

- (1) A は 同い Hilbert space \mathcal{H} 上に unique normal extension $\bar{A}_1 + i\bar{A}_2$ をもつ。 ここに、 A_1, A_2 は A の real-, imaginary part を示す。
- (2) N を A の (possibly larger) Hilbert space K への normal extension とするとき、 N の \mathcal{H} への制限 $N|_{\mathcal{H}(N) \cap \mathcal{H}}$ は \mathcal{H} 上の normal operator で、 $\bar{A}_1 + i\bar{A}_2$ と unitarily equivalent になる。

8. Hilbert space \mathcal{H} 上の densely defined operator $A = A_1 + iA_2$ (A_1, A_2 : essentially selfadjoint) が与えられていたとする。 もしも、 \bar{A}_1 と \bar{A}_2 の spectral projections が互いに可換ならば、 A は同い空間 \mathcal{H} 上に unique に normal extension $\bar{A}_1 + i\bar{A}_2$ をもつ。

文 献

1. S. Clary, Equality of quasi-similar hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 53 (1975), 88-90
2. R.G. Douglas, On the operator equations $S^*XT=X$ and related topics, Acta Sci. Math., (Szeged), 30 (1969), 19-32
3. S. Ôta and K. Schmüdgen, On some classes of unbounded operators, Integral Equations and Operator Theory, 12 (1989), 211-226
4. S. Ôta, Quasi-affinity for unbounded representations, to appear in Math. Nachr.
5. H. Radjavi and P. Rosenthal, On roots of normal operators, J. Math. Anal. Appl., 34 (1971), 653-664
6. B. Sz-Nagy and C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, Amsterdam 1970.
7. J.P. Williams, Operators similar to their adjoints, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 121-123.